REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **5.1.**, **5.2.**, **7.1.** e **7.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho \, e^{i\theta})^n = \rho^n \, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} \; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \, e^u$

$(a^u)' = u' \, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{8n-4}{n+1}$

1.1. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

1.2. Seja f a função, de domínio $]-\infty, 8[$, definida por $f(x) = \log_2(8-x)$

A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

2. Quatro pessoas vão escolher, cada uma e em segredo, um dos seguintes números: 1, 2, 3, 4 e 5

Qual é a probabilidade de exatamente duas delas escolherem o número 5 ?

(A) $0{,}1530$ **(B)** $0{,}1532$ **(C)** $0{,}1534$ **(D)** $0{,}1536$

3. Um saco contém bolas azuis e bolas brancas, indistinguíveis ao tato. Cada bola tem uma única cor e só existem bolas azuis e bolas brancas no saco.

3.1. Retiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «A primeira bola retirada é azul»

B : «A segunda bola retirada é branca»

Sabe-se que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3} P(A)$

Justifique que inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis no saco.

Sugestão: comece por designar por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco.

3.2. Considere que se alterou a constituição inicial do saco e que, neste, estão agora oito bolas azuis e sete bolas brancas.

Pretende-se colocar todas estas bolas em dez caixas numeradas de 1 a 10, de tal forma que:

- cada caixa com número par tenha, pelo menos, uma bola azul;
- cada caixa com número ímpar tenha, pelo menos, uma bola branca;
- cada caixa tenha, no máximo, duas bolas.

Nestas condições, de quantas maneiras diferentes podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas?

(A) 1176 **(B)** 2520 **(C)** $28\,016$ **(D)** $30\,550$

4. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

4.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \overline{z}$

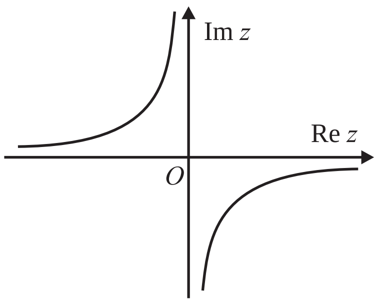
Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.

Determine o perímetro desse polígono.

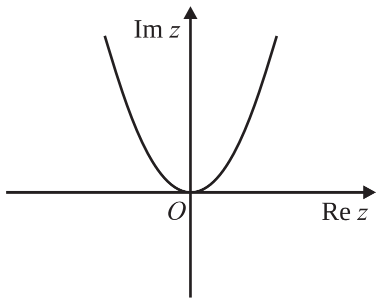
4.2. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

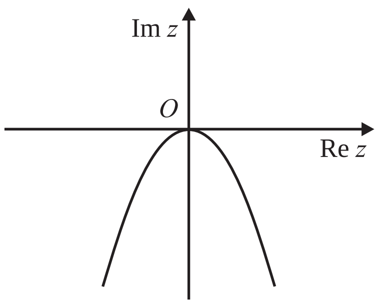
(A)



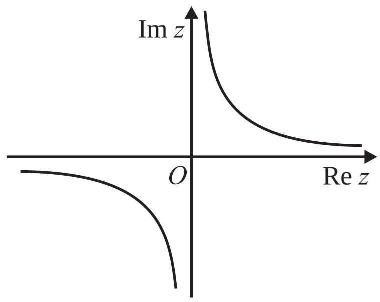
(B)



(C)



(D)



5. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.

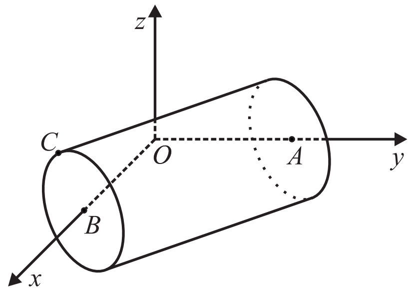


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

5.1. Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π

5.2. Seja P o ponto de coordenadas $(3, 5, 6)$

Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P

6. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, os pontos S, T e U e a reta r de equação $y = 2x + 4$

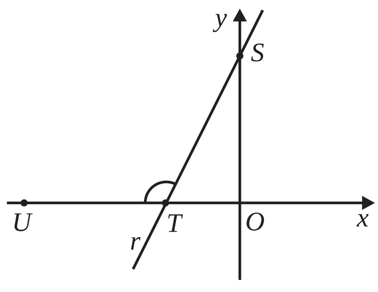


Figura 2

Sabe-se que:

- os pontos S e T são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta r com os eixos Oy e Ox
- o ponto U pertence ao eixo Ox e tem abcissa inferior à do ponto T

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo STU?

(A) 4,25 **(B)** 2,68 **(C)** 2,03 **(D)** 1,82

7. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

Na Figura 3, está representado esse mecanismo.

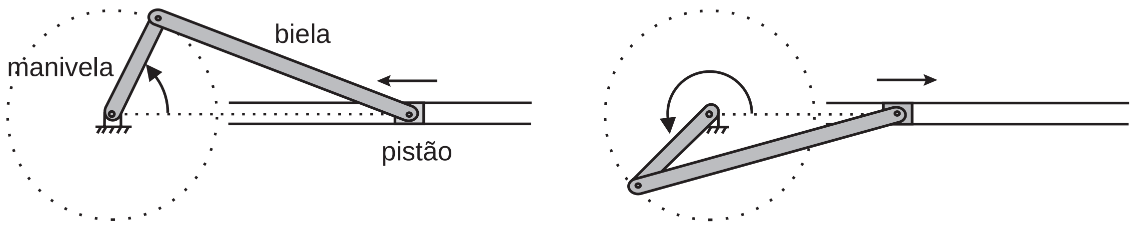


Figura 3

Na Figura 4, está representado um esquema do mecanismo descrito.

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem $1\ \text{cm}$ de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O, A, P e B são colineares.

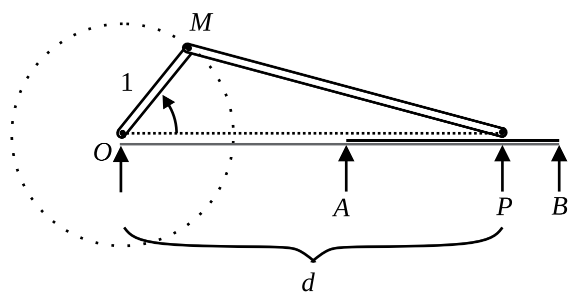


Figura 4

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante.

Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \text{sen}^2 t} \quad , \quad t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos)

7.1. Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

7.2. Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0, a distância do pistão ao ponto O

Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0, sabendo-se que este valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

8. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação $x=1$, e um ponto A, de ordenada a $(a>1)$, pertencente à reta r

Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto B

Qual das expressões seguintes dá, em função de a, a abcissa do ponto B?

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(B) $\sqrt{a^2+1}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

(D) $\sqrt{a^2-1}$

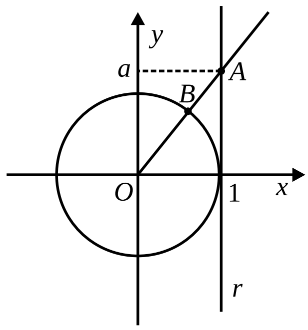


Figura 5

9. Seja f a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x)=x+\ln(e^x+1)$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

9.1. O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Determine uma equação dessa assíntota.

9.2. A equação $f(x)=2x+1$ tem uma única solução.

Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com $k>0$

9.3. Seja h a função definida em $]-\infty, 2]$ por $h(x) = f(x) - x$

Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1}, função inversa de h ?

(A) $e^x - 1$ **(B)** $1 - e^x$ **(C)** $\ln(e^x - 1)$ **(D)** $\ln(1 - e^x)$

10. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

10.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 0$

10.2. Estude a função g quanto à monotonia em $]0, +\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">5.1.</td><td colspan="4">5.2.</td><td colspan="3">7.1.</td><td colspan="3">7.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">16</td><td colspan="4">20</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">20</td><td>72</td></tr>
<tr><td>Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>9.3.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="14">8 x 16 pontos</td><td>128</td></tr>
<tr><td colspan="15">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>